**Suites de fonctions**

**Types de convergence**

Définition : Suite de fonctions

On appelle suite de fonctions de vers toute suite ou (pour un certain ) où

**Convergence simple**

Soit une suite de fonctions de vers .

Définition : Convergence simple.

On dit que la suite de fonctions converge simplement (CVS) sur vers si :

la suite numérique converge vers

C’est-à-dire :

C’est-à-dire :

On dira que CVS sur s’il existe une fonction telle que CVS sur vers .

Définition : Domaine de convergence simple

Le domaine de convergence simple de la suite de fonctions de vers est la plus grande partie sur laquelle CVS.

Définition : Limite simple

Si CVS sur vers , on dit que est la limite simple de sur .

**Paramètres préservés par le passage à la limite simple**

Propriété : Soit une suite de fonctions de vers .On suppose que CVS sur vers .

1. Si est positive sur , est positive sur
2. Si est croissante sur , alors est croissante sur
3. Si est convexe sur un intervalle , est convexe sur .

**Paramètres NON conservés par le passage à la limite simple (mais par la convergence uniforme)**

1. La continuité
2. Le caractère borné
3. L’interversion série-intégrale

**Convergence uniforme**

Définition : Soit une suite de fonctions de vers . On dit que converge uniformément (CVU) sur vers si :

Théorème : Soit une suite de fonctions de vers , et . On a équivalence entre :

1. CVU sur vers
2. tel que , la fonction est bornée sur , et :

Théorème : Si CVU sur vers , alors CVS sur vers .

**Propriétés préservées par la CVU**

est une suite de fonctions de vers , et une partie de .

1. **Caractère borné**

Propriété :

Si :

1. est bornée sur .
2. CVU sur vers

Alors est bornée sur .

1. **Continuité**

Théorème : Soit .

On suppose que :

1. est continue en .
2. CVU sur vers une fonction .

Alors est continue en .

Corollaire : Si :

1. est continue sur
2. CVU sur vers une fonction .

Alors est continue sur .

1. **Interversion de limites**

Théorème de la double limite :

Soit un point adhérent à (ou (resp. ) si n’est pas majoré (resp. minoré))

On suppose que :

1. CVU sur vers une fonction
2. , la fonction admet une limite finie quand qu’on note

Alors la série est convergente, la fonction admet une limite en et ces 2 limites sont égales :

**Suites de fonctions & intégration**

**Intégration sur un segment**

Théorème :

Soient