**Suites de fonctions**

**Types de convergence**

Définition : Suite de fonctions

On appelle suite de fonctions de vers toute suite ou (pour un certain ) où

**Convergence simple**

Soit une suite de fonctions de vers .

Définition : Convergence simple.

On dit que la suite de fonctions converge simplement (CVS) sur vers si :

la suite numérique converge vers

C’est-à-dire :

C’est-à-dire :

On dira que CVS sur s’il existe une fonction telle que CVS sur vers .

Définition : Domaine de convergence simple

Le domaine de convergence simple de la suite de fonctions de vers est la plus grande partie sur laquelle CVS.

Définition : Limite simple

Si CVS sur vers , on dit que est la limite simple de sur .

**Paramètres préservés par le passage à la limite simple**

Propriété : Soit une suite de fonctions de vers .On suppose que CVS sur vers .

1. Si est positive sur , est positive sur
2. Si est croissante sur , alors est croissante sur
3. Si est convexe sur un intervalle , est convexe sur .

**Paramètres NON conservés par le passage à la limite simple (mais par la convergence uniforme)**

1. La continuité
2. Le caractère borné
3. L’interversion série-intégrale

**Convergence uniforme**

Définition : Soit une suite de fonctions de vers . On dit que converge uniformément (CVU) sur vers si :

Théorème : Soit une suite de fonctions de vers , et . On a équivalence entre :

1. CVU sur vers
2. tel que , la fonction est bornée sur , et :

Théorème : Si CVU sur vers , alors CVS sur vers .

**Propriétés préservées par la CVU**

est une suite de fonctions de vers , et une partie de .

1. **Caractère borné**

Propriété :

Si :

1. est bornée sur .
2. CVU sur vers

Alors est bornée sur .

1. **Continuité**

Théorème : Soit .

On suppose que :

1. est continue en .
2. CVU sur vers une fonction .

Alors est continue en .

Corollaire : Si :

1. est continue sur
2. CVU sur vers une fonction .

Alors est continue sur .

1. **Interversion de limites**

Théorème de la double limite :

Soit un point adhérent à (ou (resp. ) si n’est pas majoré (resp. minoré))

On suppose que :

1. CVU sur vers une fonction
2. , la fonction admet une limite finie quand qu’on note

Alors la série est convergente, la fonction admet une limite en et ces 2 limites sont égales :

**Suites de fonctions & intégration**

**Intégration sur un segment**

Théorème :

Soient une suite de fonctions de vers

Supposons que :

1. est continue sur
2. CVU sur vers une fonction

Alors est continue sur et

Théorème :

Soient une suite de fonctions de vers

Supposons que :

1. est continue par morceaux sur
2. CVU sur vers une fonction
3. est continue par morceaux

Alors

**Intégration sur un intervalle quelconque**

Théorème de convergence dominée (TCD)

Soit un intervalle de et une suite de fonctions de vers . On suppose que :

1. ,
2. CVS sur vers une fonction
3. (Hypothèse de domination)

, intégrable sur , telle que :

Alors pour et sont intégrables sur et

**Dérivation**

Théorème de dérivation :

Soient un intervalle de et une suite de fonctions de vers . On suppose que :

1. Pour tout , est de classe sur
2. La suite de fonctions converge simplement en un point
3. La suite de fonctions converge uniformément sur tout segment de vers une fonction

Alors converge uniformément sur tout segment de vers une fonction , de dérivée .

**Dérivées d’ordre supérieur**

Théorème :

Soit un intervalle de une suite de fonctions de vers . On suppose que :

1. est de classe sur .
2. CVS sur vers une fonction
3. CVU sur tout segment inclus dans vers une fonction

Alors la limite simple de est de classe sur et